

ΜΑΥ111: Απειροστικός Λογισμός Ι (2025-26) - Φεβρουάριος 2026

Ημερομηνία: 6/2/2026

Διάρκεια: 3 ώρες

1. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leq x$.

β) Ισχύει ότι $a_n \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M .

γ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > \frac{9}{10}$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.
(4 × (0, 1 + 0, 4) = 2 μον.)

2. α) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $a \leq b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Δείξτε ότι $\sup A = \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\sup, \inf, \max, \min$ των συνόλων (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας):

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : (x+2)(x-\sqrt{7}) \leq 0 \right\} \quad \text{και} \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1+1 \text{ μον.})$$

3. α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha_n = \left(3\sqrt[n]{n} - \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right)^n, \quad \beta_n = n^2 \sin \left(\frac{1}{n^3} \right), \quad \gamma_n = \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n^2}{(n+2)!} + \dots + \frac{n^n}{(2n)!}$$

Αναφέρετε ρητά τα κριτήρια σύγκλισης, γνωστά όρια ή άλλα αποτελέσματα από τη θεωρία που χρησιμοποιήσατε.

β) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.
(1+1 μον.)

4. α) Έστω (a_n) μια ακολουθία Cauchy. Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε $a_{k_n} \rightarrow a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε τότε ότι $a_n \rightarrow a$.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
(1+1 μον.)

5. α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(0) < g(0)$ και ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ υπάρχει $y \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x) < f(y)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.
(1+1 μον.)

6. α) Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + \sqrt{x}) - f(x) = 0$.

β) Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + \frac{x}{x-2}$. Βρείτε (αν υπάρχουν) όλες τις ασύμπτωτες και σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα της f .
(1+1 μον.)

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!